10. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.Н. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геометр.семинара./ ВИНИТИ . .М.,1973.Т.4.С.7-70.

11. Остиану Н.М., Балазюк Т.Н. Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ . М.,1978.Т.10.С.75-115.

12. Попов Ю.И. О проективно-дифференциальной геометрии двухсоставного гиперполосного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m,n-1}$ // Тезисы докл. 7-й Всес.конф. по современным проблемам геометрии. Минск,1979.С.160.

13. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I/ Калинингр.ун-т. Калининград,1984.93с. Библиогр.: 21 назв.Деп. в ВИНИТИ 2.07.84,№ 4481-84 Деп.

14. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$ -распределением проективного пространства.II/ Калинингр.ун-т.Калининград,1984.36с.Библиогр.:8 назв.Деп. в ВИНИТИ 9.01.85,№ 252-85Деп.

15. Попов Ю.И. Об одномерных нормалях первого рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16. С.57-66.

16. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ М.,1975.Т.7.С.117-151.

17. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$ // Дифф.геометрия многообразий фигур: Сб. науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1983.Вып.14.С.111-115.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.18 1987

УДК 514.75

ПАРЫ θ КОНГРУЭНЦИЙ С ЗАДАННЫМ СООТНОШЕНИЕМ АБСЦИСС ФОКУСОВ

О.С.Редозубова

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В трехмерном евклидовом пространстве рассматриваются пары θ конгруэнций,у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\rho_1\rho_1' = \rho_2\rho_2'$,т.е. абсциссы соответствующих фокусов обратно пропорциональны.

Парами θ конгруэнций называются такие пары $\{\tau_1\}, \{\tau_2\}$, фокусы которых F_1, F_1', F_2, F_2' удовлетворяют двум условиям: а)касательные плоскости фокальных поверхностей $(F_1),(F_1')$ проходят соответственно через точки F_2, F_2' ; б)касательные плоскости фокальных поверхностей $(F_2),(F_2')$ -через точки F_1', F_1 соответственно.

С парой конгруэнций $\{\tau_a\}$ $(a=1,2)$ связана конгруэнция общих перпендикуляров $\{\tau\}$.Прямые τ пересекают τ_a соответственно в точках K_a. Используется подвижный ортонормированный репер $R=(O,\bar{e}_i)$($i=1,2,3$),где $O\in\tau, \bar{e}_3 \parallel \tau$. Прямые τ_a образуют с $\bar{e}_1$ углы α_a; $\bar{\eta}_a \parallel \tau_a$, $\bar{\eta}_a = \bar{e}_1 \cos\alpha_a + \bar{e}_2 \sin\alpha_a$.
По отношению к реперам $(K_a,\bar{\eta}_a)$ фокусы конгруэнций $\{\tau_a\}$ F_a, F_a' имеют координаты ρ_a, ρ_a' ;координаты точек K_a относительно репера $(O,\bar{e}_3)$ на прямой τ обозначим h_a.

Известно [1,с.4] ,что существует четыре класса пар θ конгруэнций: $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$. Пары θ_1 наиболее общие,они характеризуются условиями: $\rho_1'\rho_2 \neq \rho_1\rho_2'$, $\rho_1\rho_2 \neq \rho_1'\rho_2'$.Пары θ_2 -пары, определяемые условием $\rho_1'\rho_2 = \rho_1\rho_2'$. Если абсциссы фокусов отличны от нуля,то у таких пар абсциссы фокусов одной конгруэнции прямо пропорциональны абсциссам фокусов другой.Пары θ_3 определяются равенством $\rho_1\rho_2 = \rho_1'\rho_2'$. У них абсциссы фокусов одной конгруэнции обратно пропорциональны абсциссам фокусов другой. Наконец, θ_4 -пары θ , соответствующие прямые которых пересечены прямыми конгруэнции общих перпендикуляров в центрах этих прямых.Обозначим буквой $\bar{\theta}$ пары θ конгруэнций,у которых абсциссы фокусов удовлетворяют условию $\varrho_1\varrho_1' = \varrho_2\varrho_2'$

Т е о р е м а 1. Пары $\overline{\theta}_1$ конгруэнций существуют с произволом одной функции двух аргументов. В случае постоянства произведения абсцисс фокусов каждой пары - с произволом четырех функций одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары $\overline{\theta}_1$ конгруэнций относительно репера R определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} \varrho_1 A_1 = Q_1\tau_2 - \Omega_{13}\dfrac{\varrho_1\varrho_1'\tau_1}{k_1-k_2} = 0, \quad \varrho_1 H_1 = Q_1\tau_1 - \Omega_{13}\dfrac{\varrho_1\varrho_1'\tau_2}{k_1-k_2} = 0, \\ g A_2 = Q_2\tau_1 + \Omega_{23}\dfrac{\varrho_1\varrho_1'\tau_2}{k_1-k_2} = 0, \quad g H_2 = -Q_2\tau_2 - \Omega_{23}\dfrac{\varrho_1\varrho_1'\tau_1}{k_1-k_2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$\varrho_1\varrho_1' = \varrho_2\varrho_2', \tag{2}$$

$$\varrho_1'\varrho_2 \neq \varrho_1\varrho_2', \quad \varrho_1\varrho_2 \neq \varrho_1'\varrho_2'. \tag{3}$$

Использованы обозначения из [1,с.3]. После дифференцирования системы уравнений внешним образом и подстановки в них значений A_a, H_a из (1), а также (2),(3) получим четыре независимых квадратичных уравнения. Неизвестных функций-пять: $d\varrho_a$, $d\varrho_1'$, Q_a ($a=1,2$). Можно доказать, что система в инволюции и определяет рассматриваемые пары с произволом одной функции двух аргументов. В случае, когда $\varrho_1\varrho_1' = \mathrm{Const}$, исследование системы (1),(2),(3) и ее продолжения приводят к выводу, что пары $\overline{\theta}_1$ с постоянным произведением абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Пары θ конгруэнций называются равнонаклонными в случае, когда одна из конгруэнций образует с фокальными плоскостями другой углы, соответственно равные тем углам, которые другая конгруэнция образует с фокальными плоскостями первой. Известно [1 ,с.15], что пары θ бывают равнонаклонными только в двух случаях: когда они первого или второго типов. Пары θ первого типа определяются условием $\varrho_1=\varrho_2$, $\varrho_1'=\varrho_2'$; пары θ второго типа-условием $\varrho_1'=-\varrho_2$, $\varrho_2'=-\varrho_1$. Известно, что в случае равнонаклонности пар θ равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и углы между фокальными плоскостями этих прямых.

Т е о р е м а 2. Пары $\overline{\theta}_2$ и $\overline{\theta}_3$ конгруэнций являются равнонаклонными тогда и только тогда, когда прямые конгруэнции общих перпендикуляров не пересекают соответствующие прямые в их фокусах. Не существует пар $\overline{\theta}_4$ конгруэнций.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пары $\overline{\theta}_2$ конгруэнций определяются системой уравнений (I),(2) при условии $\varrho_1'\varrho_2=\varrho_1\varrho_2'$. В случае, когда абсциссы фокусов не равны нулю, т.е. прямые конгруэнции общих перпендикуляров не пересекают соответствующие прямые в фокусах, легко получить равенства, определяющие пары θ конгруэнций первого типа. Обратное всегда верно. Пары θ первого типа являются парами $\overline{\theta}_2$. Пары $\overline{\theta}_3$ конгруэнций определяются системой уравнений (1),(2), при условии $\varrho_1\varrho_2=\varrho_1'\varrho_2'$. В случае, когда абсциссы фокусов отличны от нуля, можно получить равенства, определяющие пары θ конгруэнций II типа. Верно и обратное: пары II типа всегда являются парами $\overline{\theta}_3$. Пары $\overline{\theta}_4$ конгруэнций определяются условиями (1),(2) и равенствами $\varrho_1'=-\varrho_1$, $\varrho_2'=-\varrho_2$. Из них можно получить $\varrho_1=\varrho_2$, а значит $\varrho_1'=\varrho_2'$, т.е. пары θ I типа. Но в соответствии с [1 ,с.I7] не бывает пар $\overline{\theta}_4$ I типа. Итак, не существует пар $\overline{\theta}_4$ конгруэнций.

Т е о р е м а 3. Пары $\overline{\theta}$ являются равнонаклонными тогда и только тогда, когда у них равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если пары $\overline{\theta}$ конгруэнций равнонаклонны, то они I или II типов [1,с.I7]. Следовательно, пары $\overline{\theta}$ конгруэнций являются парами $\overline{\theta}_2$ или $\overline{\theta}_3$. У них, как известно [1,с.17], равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых. Обратно, если у пар $\overline{\theta}$ конгруэнций равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, т.е. $\varrho_1-\varrho_1' = \varrho_2-\varrho_2'$, то при условии (2) получим либо $\varrho_1=\varrho_2$, $\varrho_1'=\varrho_2'$, либо $\varrho_2'=-\varrho_1$, $\varrho_1'=-\varrho_2$. Такие пары, как видно, являются равнонаклонными парами конгруэнций.

Заметим, что равенство $\varrho_1-\varrho_1'=\varrho_2-\varrho_2'$ является условием равнонаклонности пар $\overline{\theta}$ и в случае, когда прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их фокусах.

Т е о р е м а 4. Пары θ нормальных конгруэнций являются всегда парами $\overline{\theta}$. У ортогональных пар θ_1 нормальных конгруэнций расстояние между соответствующими прямыми является постоянным тогда и только тогда, когда постоянно произведение абсцисс фокусов каждой из конгруэнций пары.

Доказательство. В самом деле, условие нормальности конгруэнции $\{z_a\}$ ($a=1,2$) можно записать в виде:

$$(h_1-h_2)^2+\rho_a\rho_a'\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)=0 \qquad (4)$$

Отсюда следует условие (2). Значит, такие пары есть пары $\bar\theta$. Пары θ_1 нормальных конгруэнций определяются системой уравнений (1), (2), (3), (4). Ортогональными являются пары, у которых соответствующие прямые перпендикулярны. Условие ортогональности пары θ можно записать в виде:

$$A_1=A_2\,. \qquad (5)$$

Таким образом, ортогональные пары θ_1 нормальных конгруэнций определяются системой уравнений (1), (2), (3), (4), (5). Дифференцируя уравнения (4), получим, учитывая (4) и (5):

$$H_1-H_2=\rho_1'\,d\rho_1+\rho_1\,d\rho_1' \qquad (6)$$

Из равенства (6) следует, что в случае постоянства произведения $\rho_1\rho_1'$ постоянно и h_1-h_2, и обратно. Следовательно, ортогональные пары θ_1 нормальных конгруэнций имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда постоянно произведение $\rho_1\rho_1'$.

Библиографический список

1. Редозубова О.С. Основы метрической теории пар θ конгруэнций / МГПИ им. В.И.Ленина. М., 1983. Деп. ВИНИТИ 13.12.83, № 6752.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ГЛАДКОЙ Р-ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.В. Силаев
(МГПИ им. В.И.Ленина)

В работе рассматривается проекция поверхности на гиперсферу в евклидовом пространстве. Исследуются случаи различного расположения векторов средних кривизн поверхности и ее образа при проекции в соответствующих точках.

1. Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E_n задана p-мерная поверхность V_p, лежащая на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r; $\vec{x}=\overrightarrow{Ox}$ -радиус-вектор текущей точки x поверхности V_p.

Присоединим к каждой точке x поверхности подвижной репер $R^x=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ ($i,j=1,2,\dots p$; $\alpha,\beta=p+1,\dots,n$) так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве $T_x(V_p)$ в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образовывали базис ортогонального дополнения к пространству $T_x(V_p)$ в точке x. В работах [2], [5] показано, что в этом случае

$$\vec{x}=x^\alpha\vec{e}_\alpha\,,\quad \vec{\Lambda}\cdot\vec{x}=-1\,. \qquad (1)$$

Зададим на V_p гладкую функцию $\lambda=\lambda(x)$ точки x. При смещении точки x по поверхности V_p точка x', $\overrightarrow{Ox'}=\lambda\overrightarrow{Ox}$ описывает поверхность $\bar V_p$. Определим отображение $f: V_p\to\bar V_p$ следующим образом: $f(x)=x' \Leftrightarrow \overrightarrow{Ox'}=\lambda\overrightarrow{Ox}$. Предположим, что f является диффеоморфизмом, тогда отображение f^{-1} назовем [3] проекцией поверхности $\bar V_p$ на гиперсферу. Известна связь вторых фундаментальных тензоров b^α_{ij} и $\bar b^\alpha_{ij}$ поверхностей V_p и $\bar V_p$ в соответствующих точках x и x' проекции:

$$b^\alpha_{ij}=\frac{1}{\lambda}\bar b^\alpha_{ij}+\frac{x^\alpha}{\lambda}K_{ij}\,, \qquad (2)$$

где K_{ij} -некоторые функции специального вида.
Из формул (1) и (2) следует, что